# TRANSFORMASI LINIER DAN SIFAT-SIFATNYA

**Mujiyem Sapti**
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

**Abstrak**

*Dalam ruang vektor dapat dikembangkan hubungan antara masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama dengan suatu fungsi yang disebut transformasi linier. Dalam transformasi linier selanjutnya dapat ditunjukkan sifat-sifat yang dimilikinya. Dengan suatu transformasi linier f maka Kernel(f) dan Image(f) berturut-turut membentuk sub ruang dari V dan W. Fungsi* $\varphi$ *dari* $Lin_F(V,W)$ *ke* $M_{mxn}(F)$ *dengan definisi* $\varphi : f \rightarrow M_{B_V}^{B_W}(f)$ *untuk* $f \in Lin_F(V,W)$ *membentuk suatu F-isomorphisme*

**Kata Kunci:** *Transformasi linier, ruang vektor, sifat, matriks reperesentasi*

## PENDAHULUAN

Diberikan V, W masing-masing adalah ruang vektor atas lapangan yang sama (sebut F). Fungsi $f$: V→W disebut transformasi linier jika $f$ mengawetkan operasi jumlah pada V dan operasi pergandaan skalar pada V (oleh F) terhadap operasi jumlahpada W dan operasi pergandaan skalar pada W (oleh F).

**Definisi:**

*Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan F. Transformasi linier f: V→ W adalah pemetaan f: V→ W yang memenuhi:*

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ *untuk semua* $v_1$ *dan* $v_2$ *di V;*
2. $f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1)$ *untuk semua* $v_1 \in V$ *dan* $\alpha \in F$.

Dengan mengembangkan definisi dan sifat ruang vektor selanjutnya dapat dilihat sifat-sifat yang dimiliki oleh transformasi linier sebagai berikut.

**SIFAT - SIFAT PADA TRANSFORMASI LINIER**

**Sifat 1.** $f(0_v) = 0_w$

**Bukti:**

Misalkan vektor nol di V dan W berturut-turut ditandai dengan $0_v$ dan $0_w$.

Terdapat hubungan berikut.

$f(0_v) = f(0_v + 0_v)$

$= f(0_v) + f(0_v) - f(0_v) + f(0_v)$

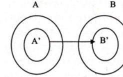
$= - f(0_v) + f(0_v) + f(0_v)$

$0_w = f(0_v)$

**Sifat 2.** $f(-v) = -f(v),\ \forall v \in V$

**Sifat 3.** $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2),\ \forall\ v_1, v_2 \in V$

Dalam teori himpunan terlihat bahwa




$A' \subset A$

$f(A') = \{ f(x) / x \in A' \} \subseteq B$ ,

$B' \subset B$

$f^{-1}(B') = \{ x \in A / f(x) \in B' \}$

$B' = \{ b \}$ sehingga $f^{-1}(B') = f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b') = \{ x \in A / f(x) = b \}$

Jika diterapkan dalam ruang vektor,

$B' = 0w$

$f^{-1}(B') = f^{-1}(0w)$

$= \{ v \in V / f(v) = 0_w \}$

$=$ Kernel $f$

$=$ Kern $(f)$

$\text{Im}(f) = \{ w \in W /\ w = f(x),\ \forall x \in V \} = f(V)$

$0_v \in$ Kern $(f)$ sehingga Kern $(f) \neq \emptyset \subset V$ dan $0w \in$ Im $(f)$ sehingga Im $(f) \neq \emptyset \subset W$

**Sifat 4.**

*Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan F, dan $f: V \rightarrow W$ suatu transformasi linier. Maka Kernel (f) dan Image (f) berturut-turut membentuk sub ruang dari V dan W.*

**Bukti:**

Karena $0_v \in$ Kern $(f)$ dan $0_w \in$ Im $(f)$ maka Kern $(f)$ dan Im$(f)$ berturut-turut merupakan himpunan bagian dari V dan W yang tak kosong. Ambil $v_1$ dan $v_2$ di Kern $(f)$, dan $\alpha \in F$. Maka berlaku

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0_w$$

dan

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = 0_w$$

Jadi $v_1 + v_2$ dan $\alpha v$ di Kern $(f)$.

Jadi Kern $(f)$ subruang dari V.

Ambil x dan y di Im $(f)$. Diperoleh $x = f(v_1)$ dan $y = f(v_2)$ untuk suatu $v_1$ dan $v_2$ di V. Maka berlaku

$$x + y = f(v_1) + f(v_2)$$
$$= f(v_1 + v_2)$$
$$\alpha x = \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1)$$

Karena $v_1 + v_2$ dan $\alpha v_1$ vektor di V maka x + y dan $\alpha$ x adalah vektor di Im$(f)$. Jadi Im $(f)$ subruang dari W.

**Sifat 5.**

*Misalkan $f: V \to W$ suatu transformasi linier. Maka f bersifat satu-satu jika dan hanya jika Kern(f) = $0_w$*

**Bukti:**

Misalkan $f$ bersifat satu-satu. Ambil $v \in$ Kern (f).

Diperoleh hubungan

$$f(v) = 0_w = f(0_v)$$

Karena f satu-satu maka berlaku $v = 0_v$. Jadi, Kern $(f) = \{ 0_v \} = 0_v$

Sebaliknya, misalkan Kern $(f) = 0_v$. Ambil vektor $v_1$ dan $v_2$ di V yang memenuhi $f\ (v_1) = f\ (v_2)$.

Diperoleh hubungan

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0_v$$

Diperoleh $v_1 - v_2 \in$ Kern$(f)$. Karena Kern$(f) = 0_v$ maka $v_1 = v_2$. Jadi $f: V \to W$ bersifat satu-satu.

Pandang $f: V \to W$ suatu transformasi linier dengan V dan W berturut-turut adalah ruang vektor berdimensi n dan m atas lapangan F.

Misalkan Bv basis dari V dan Bw basis dari W, sebut

$$\left.\begin{array}{l} Bv = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \} \\ Bw = \{ e_1', e_2', e_3', \ldots, e_n' \} \end{array}\right\}$$

$v \in V$ maka $\exists!\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in F$ sedemikian sehingga Bv basis dari V.

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n$$

$V = [\ V\ ]_{Bv} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in F^n$ ruang vektor atas F.

$[\ V\ ]_{Bv}$ menyatakan koordinat relatif vektor v terhadap basis Bv

**Sifat 6.**

*Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi n atas lapangan F, dan Bv suatu basis dari V. Maka relasi $\varphi : V \to [V]_{Bv}$, untuk semua vektor $v \in V$, mendefinisikan isomorphis-me $\varphi : V \to F^n$*

**Bukti:**

Akan dibuktikan bahwa $\varphi : V \to F^n$ bersifat linier, satu-satu, dan pada.

Misalkan $Bv = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n \}$

Ambil vektor $v_1$ dan $v_2$ di V, dan skalar $\gamma \in F$, dan misalkan

$v_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ dan

$v_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$

diperoleh

$v_1 + v_2 = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n$

dan

$\gamma v_1 = (\gamma\alpha_1)e_1 + (\gamma\alpha_2)e_2 + \ldots + (\gamma\alpha_n)e_n$

Selanjutnya diperoleh

$$\varphi(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \ldots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$

dan $\varphi(\gamma v_1) = \begin{pmatrix} \gamma\alpha_1 \\ \ldots \\ \gamma\beta_n \end{pmatrix}$

$$= \gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \gamma\,\varphi(v_1)$$

Jadi $\varphi : V \to F^n$ suatu transformasi linier.

Akan ditunjukkan $\varphi$ bersifat satu-satu (injektif) dan pada (surjektif).

Ambil $v_1 \in$ Kern ($\varphi$).

Berarti $\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_w \\ \ldots \\ 0_w \end{pmatrix}$

Diperoleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0_w$ atau $v_1 = 0_v$. Dengan demikian Kern ($\varphi$) $= 0_v$.

Menurut sifat 5. transformasi $\varphi : V \rightarrow F^n$ bersifat satu-satu.

Ambil $\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \delta_n \end{pmatrix} \in F^n$

Pilih $v = \delta_1 e_1 + \dots + \delta_n e_n$ vektor di V, diperoleh:

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \dots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa pemetaan $\varphi : V \rightarrow F^n$ bersifat pada.

*Jadi* $\varphi : V \rightarrow F^n$ *suatu isomorphisme atau* $V \cong F^n$

Dengan cara yang sama jika Ruang vektor W berdimensi m atas lapangan F, diperoleh $W \cong F^m$.

Pandang $f : V \rightarrow W$ suatu transformasi linier dengan V dan W berturut-turut adalah ruang vektor berdimensi n dan m atas lapangan F.

Misalkan Bv basis dari V, sebut $Bv = \{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \}$, Bw basis dari W, sebut $Bw = \{ e_1', e_2', e_3', \dots, e_n' \}$

Selanjutnya misalkan

$f(e_j) = \alpha_{1j}e_1' + \dots + \alpha_{mj}e_m'$, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ Koordinat vektor $f(e_j)$ terhadap basis Bw adalah:

$$[f(e_j)]_{Bw} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \dots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

**Definisi:**

*Matriks representasi dari transformasi linier* $f : V \rightarrow W$ *terhadap basis Bv dari V dan basis Bw dari W adalah matriks m x n,* $[f]_{Bv,Bw} = ([f(e_1)]_{Bw} \dots [f(e_n)]_{Bw})$ *dengan* $[f(e_j)]_{Bw}$, $j = 1, 2, \dots, n$ *menyatakan koordinat vektor* $f(e_j)$ *terhadap basis Bw.*

*Dengan memisalkan bahwa*

$$[f(e_j)]_{Bw} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \dots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$ *diperoleh*

*matriks representasi dari transformasi linier* $f : V \rightarrow W$ *yaitu :*

$$[f]_{Bv,Bw} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

*ditulis singkat*

$[\ f\ ]_{Bv,Bw} = \|\alpha_{ij}\|$ , $mxn$

Catatan: $[\ f\ ]_{Bv,Bw}$ dapat pula dinotasikan dengan $M_{Bv}^{Bw}(f)$

**Sifat 7.**

$M_{Bv}^{Bw}(f)\,[V]_{Bv} = [f(v)]_{Bw}$ ,

$\forall v \in V$

**Bukti:**

Ambil sebarang $v \in V$

$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ yang berarti $[V]_{Bv} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$f(v) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)$

$= \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n)$

$= \alpha_1(\alpha_{11}e_1' + \alpha_{21}e_2' + \ldots + \alpha_{m1}e_m')$

$+ \alpha_2(\alpha_{12}e_1' + \alpha_{22}e_2' + \ldots + \alpha_{m2}e_m')$

$+ \ldots$

$+ \alpha_n(\alpha_{1n}e_1' + \alpha_{2n}e_2' + \ldots + \alpha_{mn}e_m')$

$= (\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_2\alpha_{12} + \ldots + \alpha_n\alpha_{1n})e_1'$

$+ (\alpha_1\alpha_{21} + \alpha_2\alpha_{22} + \ldots + \alpha_n\alpha_{2n})e_2'$

$+ \ldots$

$+ (\alpha_1\alpha_{m1} + \alpha_2\alpha_{m2} + \ldots + \alpha_n\alpha_{mn})e_m'$

$$[f(v)]_{Bv} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_{11} & \alpha_2\alpha_{12} & \ldots & \alpha_n\alpha_{1n} \\ \alpha_1\alpha_{21} & \alpha_2\alpha_{22} & \ldots & \alpha_n\alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1\alpha_{m1} & \alpha_2\alpha_{m2} & \ldots & \alpha_n\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= M_{Bv}^{Bw}(f) \quad . \quad [V]_{Bv}$$

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan F. Himpunan semua transformasi linier dari V ke W ditandai dengan $\mathrm{Lin}_F(V, W)$

$\mathrm{Lin}_F(V, W) = \{\ f : V \to W \mid f$ linier $\}$

Untuk transformasi linier $f$ dan $g$ di $\mathrm{Lin}_F(V, W)$ dan skalar $\alpha \in F$, didefinisikan

$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$,

$\forall v \in V$v dan

$(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$, $\forall v \in V$

Diperoleh transformasi linier $f+g : V \to W$ dan $\alpha f : V \to W$

Dengan kata lain

$f+g \in \mathrm{Lin}_F(V, W)$ dan

$\alpha f \in \mathrm{Lin}_F(V, W)$

Diperoleh berturut-turut operasi jumlahpada $\mathrm{Lin}_F(V, W)$ yaitu

$+ : \mathrm{Lin}_F(V, W) \times \mathrm{Lin}_F(V, W) \to \mathrm{Lin}_F(V, W)$

$+ : (f, g) \to f+g$,

dan operasi pergandaan skalar

• : F x $\text{Lin}_F$ (V, W) $\rightarrow$ $\text{Lin}_F$ (V, W)

• : $(\alpha, f) \rightarrow \alpha f$

Struktur yang dimiliki $\text{Lin}_F$ (V, W) terhadap operasi jumlah dan pergandaan skalar tersebut diketengahkan dalam sifat 8 berikut.

**Sifat 8.**

*Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan F. Terhadap operasi jumlahdan pergandaan skalar $\text{Lin}_F$ (V, W) membentuk ruang vektor atas F*

**Bukti: 1.** Terhadap operasi jumlah.

a. $f + g = g + f$ , untuk semua $f$ dan $g$ *di* $\text{Lin}_F$ (V, W) karena untuk semua $v \in V$ diperoleh

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$= g(v) + f(v)$$
$$= (g+f)(v)$$

b. $(f+g)+h+f+(g+h)$ , untuk semua $f$, $g$, dan $h$ di $\text{Lin}_F$ (V, W) karena untuk semua $v \in V$ diperoleh

$$((f+g)+h)(v) = (f+g)(v) + h(v)$$
$$= (f(v)+g(v)) + h(v)$$
$$= f(v) + (g(v)+h(v))$$
$$= f(v) + (g+h)(v)$$
$$= (f+(g+h))(v)$$

c. Terdapat fungsi nol di $\text{Lin}_F$ (V, W) , yaitu $0 : V \rightarrow W$, yang memetakan setiap vektor $v \in V$ menjadi vektor nol di W, yaitu $0(v) = 0$.

Untuk setiap $f \in \text{Lin}_F$ (V, W) dan $v \in V$ berlaku

$$(f+0)(v) = f(v) + 0(v) = f(v)$$

Jadi $f + 0 = f$ untuk semua $f \in \text{Lin}_F$ (V, W). Fungsi nol adalah unsur nol (vektor nol) di $\text{Lin}_F$ (V, W).

d. Untuk setiap $f \in \text{Lin}_F$ (V, W) terdapat $-f \in \text{Lin}_F$ (V, W) yang memenuhi

$$f = (-f) = 0$$

Fungsi $-f$ : $V \rightarrow W$ didefinisikan melalui relasi $-f : v \rightarrow -f(v)$ , untuk semua $v \in V$.

Fungsi $f: V \to W$ bersifat linier , atau $-f \in$ Lin$_F$ (V, W). Selanjutnya diperoleh:

$(f+(-f))(v) = f(v) + (-f)(v)$

$= f(v) - f(v) = 0$

$= 0(v)$ untuk semua $v \in$ V.

Ini berarti $f + (-f) = 0$.

Fungsi $-f$ adalah balikan atau invers dari fungsi $f$.

**Bukti : 2.** Terhadap operasi pergandaan skalar.

a. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$, untuk semua $f$, $g$ di Lin$_F$ (V, W) dan $\alpha \in$F karena untuk semua vektor $v \in$ V diperoleh:

$(\alpha(f+g))(v) = (\alpha(f+g)(v)$

$= \alpha(f(v) + g(v))$

$= \alpha(f(v)) + \alpha(g(v))$

$= (\alpha f)(v) + (\alpha g)(v)$

$= (\alpha f + \alpha g)(v)$

b. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$, untuk semua $f$ di Lin$_F$ (V, W), dan $\alpha, \beta \in$F karena untuk semua vektor $v \in$ V diperoleh:

$((\alpha+\beta)f)(v) = (\alpha+\beta)f(v)$

$= \alpha f(v) + \beta f(v)$

c. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$, untuk semua $f \in$ Lin$_F$ (V, W), dan $\alpha, \beta \in$F karena untuk semua vektor $v \in$ V diperoleh:

$((\alpha\beta)f)(v) = (\alpha\beta)f(v)$

$= \alpha(\beta f(v))$

$= \alpha(\beta f)(v)$

d. $1f = f$ untuk semua $f \in$ Lin$_F$ (V, W) karena untuk semua vektor $v \in$ V diperoleh:

$(1f)(v) = 1f(v) = f(v)$

Terbukti bahwa Lin$_F$ (V, W) membentuk ruang vektor atas lapangan F.

Ruang vektor Lin$_F$ (V, W) disebut ruang pemetaan dari V ke dalam W. Hubungan antara ruang pemetaan dan ruang matriks diketengahkan dalam sifat 9 berikut ini.

**Sifat 9.**

*Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan F yang berturut-turut berdimensi n dan m. Selanjutnya misalkan Bv dan Bw berturut-turut adalah basis ruang V dan W, dan $M_{mn}(F)$ menyatakan* *ruang matriks berukuran m x ndengan komponen di F. Fungsi $\varphi: Lin_F(V, W) \to M_{mn}(F)$ yang didefinisikan oleh :*

$\varphi: f \to M_{Bv}^{Bw}(f)$ ,

*untuk semua $f \in Lin_F(V, W)$, adalah suatu F-isomorphisme.*

**Bukti 1.** $\varphi$ :$Lin_F$ (V, W)$\to M_{mn}$(F) suatu transformasi linier.

Misalkan Bv = { $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ }. Ambil $f$ dan $g$ di $Lin_F$ (V, W), dan $\alpha$ di F. Diperoleh:

$\varphi(f+g)$

$=([(f+g)(e_1)]_{B_w} \ldots [(f+g)(e_n)]_{Bw})$

$= ([f(e_1)+g(e_1)]_{Bw} \ldots [f(e_n)+g(e_n)]_{Bw}$

$= ([f(e_1)]_{Bw} \ldots [f(e_n)]_{Bw}) + ([g(e_1)]_{Bw} \ldots [g(e_n)]_{Bw})$

$= M_{Bv}^{Bw}(f) + M_{Bv}^{Bw}(g)$

$= \varphi(f) + \varphi(g)$,

dan

$\varphi(\alpha f) =$

$([(\alpha f)(e_1)]_{Bw} \ldots [(\alpha f)(e_n)]_{Bw})$

$= ([\alpha f(e_1)]_{Bw} \ldots [\alpha f(e_n)]_{Bw})$

$= \alpha([f(e_1)]_{Bw} \ldots [f(e_n)]_{Bw})$

$= \alpha [f]_{Bv,Bw}$

$= \alpha\ M_{Bv}^{Bw}(f)$

$= \alpha\ \varphi(f)$

Ini menunjukkan bahwa $\varphi$: $Lin_F$ (V, W) $\to M_{mn}$(F) transformasi linier atau F-homomorphisme.

**Bukti 2.** $\varphi$ :$Lin_F$ (V, W)$\to M_{mn}$(F) bersifat satu-satu.

Misalkan $h \in Lin_F$ (V, W) yang memenuhi $\varphi(h) = 0$ (=matriks nol . Ini berarti

$\varphi(h) = ([h(e_1)]_{Bw} \ldots [h(e_n)]_{Bw}) = (0, \ldots, 0)$, yaitu $[h(e_j)]_{Bw} = 0$ untuk setiap $e_j \in$ Bv. Menurut sifat 6 diperoleh $h(e_j) = 0$ untuk semua j = 1, 2,…,n.

Dengan demikian setiap vektor $z = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n \in V$ dipetakan menjadi

$h(z) = \beta_1 h(e_1) + \ldots + \beta_n h(e_n) = 0$.

Diperoleh $h = 0$. Ini menunjukkan bahwa pemetaan linier $\varphi$: $Lin_F$ (V, W)$\to M_{mn}$(F) bersifat satu-satu(injektif).

**Bukti 3.** $\varphi$: $Lin_F$(V, W)$\to M_{mxn}$(F) bersifat pada.

Ambil $A \in M_{mxn}$ dan misalkan $A = \|a_{ij}\|$. Misalkan

Bw = { e₁', e₂', e₃',…, eₙ' }, yaitu basis ruang vektor W dan tulis

$w_j = \alpha_{1j}e_1' + ... + \alpha_{mj}e_m'$

untuk j = 1, 2, …, n.

Relasi:

$$f : \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \gamma_j w_j$$

dengan $\gamma_1, ..., \gamma_n$, meliputi semua vektor di V, dan mendefinisikan transformasi linier $f : V \rightarrow W$. Fungsi tersebut memenuhi hubungan

$f(v_j) = w_j = \alpha_{1j}e_1' + ... + \alpha_{mj}e_m'$ ,

untuk j = 1, 2, …, n

Diperoleh:

$$[f(e_j)]_{Bw} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ ... \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix},$$

untuk j = 1, 2, …, n dan

$\varphi(f) = M_{Bv}^{Bw}(f)$

$= ([f(e_1)]_{Bw} ... [f(e_n)]_{Bw}) = A$

Terbukti bahwa

$\varphi$: $Lin_F$ (V, W)→ $M_{mxn}$(F) bersifat pada (surjektif).

**Sifat 10.**

*Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan , dan $f : V \rightarrow W$ suatu transformasi linier. Terhadap basis Bv, Bv' dari V, dan basis Bw, Bw' dari W, matriks representasi untuk $f : V \rightarrow W$ memenuhi*

$TM_{Bv}^{Bw}(f) = M_{Bv'}^{Bw'}(f)S$

*untuk suatu matriks S, nxn, dan T, mxm, yang tak singular.*

**Bukti:**

Dari sifat 7. $M_{Bv}^{Bw}(f)$ $[V]_{Bv}$ = $[f(v)]_{Bw}$ , ∀v ∈ V , selanjutnya untuk ruang vektor V diambil basis yang lain, misalnya Bv' = $\{e_1', ..., e_n'\}$

Dimisalkan vektor $e_j$ di basis Bv yang lama, terhadap basis Bv' yang baru mempunyai koordinat

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} e' \ ,$$

untuk j = 1, 2, …, n.

Kombinasi linier vektor v ∈ V terhadap basis Bv' adalah

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} e_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\beta_j\right)e_i'$$

Diperoleh koordinat vektor $v \in V$ terhadap basis Bv'

$$[v]_{Bv'} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}\ldots\sigma_{1n}\\ \ldots\\ \sigma_{n1}\ldots\sigma_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \ldots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

Dengan menandai matriks *nxn*

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\ldots\sigma_{1n}\\ \ldots\\ \sigma_{n1}\ldots\sigma_{nn}\end{pmatrix} = S$$

hubungan koordinat vektor $v \in V$ terhadap basis Bv dan Bv' menjadi

$$[v]_{Bv'} = S\,[v]_{Bv}$$

Dengan cara yang sama untuk ruang vektor W jika diambil basis lain Bw', misalkan $e_i = \sum_{k=1}^{m}\tau_{ki}e_i'$ untuk I = 1, 2, …, m . Dengan menandai matriks *mxm*

$$\begin{pmatrix}\tau_{11}\ldots\tau_{1m}\\ \ldots\\ \tau_{m1}\ldots\tau_{mm}\end{pmatrix} = T$$

maka diperoleh hubungan koordinat vektor $w \in W$ terhadap basis Bw dan Bw' adalah

$$[w]_{Bw'} = T\,[w]_{Bw}$$

Kedua hubungan tersebut disebut sebagai perubahan basis . Hubungan matriks representasi untuk transformasi linier $f: V \to W$ terhadap perubahan basis di ruang vektor V dan W diturunkan sebagai berikut. Untuk sebarang vektor $v \in V$ diperoleh:

$$[f(v)]_{Bw'} = M_{Bv'}^{Bw'}(f).[v]_{Bv'}$$

$$T[f(v)]_{Bw} = M_{Bv'}^{Bw'}(f).S[v]_{Bv}$$

$$TM_{Bv}^{Bw}(f)[v]_{Bv} = M_{Bv'}^{Bw'}(f).S[v]_{Bv}$$

Hubungan dalam kesamaan terakhir berlaku untuk sebarang vektor v di V. Dengan demikian diperoleh hubungan matriks representasi untuk transformasi linier $f: V \to W$ terhadap perubahan basis di ruang vektor V dan W,

$$TM_{Bv}^{Bw}(f) = M_{Bv'}^{Bw'}(f)S$$

## DAFTAR PUSTAKA


Achmad Arifin, 2001. *Aljabar Linear*. Bandung: Penerbit ITB .

Morton L. Curtis, 1990. *Abstract Linear Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Thomas W. Hungeford, 1974. *Algebra*. New York: Springer-Verlag.